RECUPERACIÓN DE ÁLGEBRA **2-Abril-2002**

1) Clasifica, según los valores de k, el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo cuando sea compatible:

$$\begin{cases} kx + (k^2+1)y + kz = k \\ x + ky + z = 0 \\ x + (k+1)y + k^2z = 2k - 1 \end{cases}$$

(2´5 puntos)

2) Averigua para qué valores de m la matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & m \\ m & 0 & 4 \end{pmatrix}$ tiene inversa y halla A^{-1} para m=2. (2 puntos)

3) Demuestra, sin desarrollar, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = x(y-x)(z-y)(t-z)$$

(1´5 puntos)

4) El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 euros(sin impuestos). El valor del vino es de 60 euros menos que el de los refrescos y el de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por el vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592´4 euros, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida. (2 puntos)

5) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (2+a)x - y = a \\ -3ax + (2-a)y = -a \end{cases}$ donde a es un parámetro real. Halla razonadamente el valor, o los valores, de a para que el sistema:

a) no tenga solución.
b) tenga infinitas soluciones.
c) tenga solución única.
d) tenga una solución en la que x = -1. (2 puntos)

SOLUCIONES

1) Para clasificar el sistema usaremos el teorema de Rouché-Frobenius:
El sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz A coincide con el de la matriz ampliada. En el caso de se compatible, el sistema será determinado (S.C.D.) si el rango anterior coincide, también, con el número de incógnitas, e indeterminado (S.C.I.)en caso contrario.

$$A' = \begin{bmatrix} k & k^2+1 & k & k \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k^2 & 2k-1 \end{bmatrix}; \text{ Estudiamos el ran (A)}; \begin{vmatrix} k & k^2+1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k^2 \end{vmatrix} = 1-k^2; \quad 1-k^2=0 \to k=\pm 1$$

a) Si $k \neq 1$ y $k \neq -1 \to$ ran (A) = 3, ran (A´) = 3, nº incógnitas = 3 S.C.D. (solución única)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & k^2+1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 2k-1 & k+1 & k^2 \end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{k^4-k^2+k-1}{1-k^2} = -\frac{k^3+k^2+1}{1+k}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & k & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2k-1 & k^2 \end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{k(1-k^{2)}}{1-k^2} = k; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} k & k^2+1 & k \\ 1 & k & 0 \\ 1 & k+1 & 2k-1 \end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{1-k}{1-k^2} = \frac{1}{1+k}$$

$$\text{Solución}: \left(-\frac{k^3+k^2+1}{1+k}, k, \frac{1}{1+k}\right)$$

b) k=1 $\to A' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} f_3 = f_1 \to$ ran (A) = ran (A´) = 2; nº incógnitas = 3, S.C.I. (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} x+2y = 1-z \\ x+y = -z \end{cases} \to \begin{cases} x+2y = 1-z \\ -x-y = z \end{cases} \text{Sumando } y = 1, x = -1-z. \text{Solución}: (-1-z, 1, z)\ \forall z \in R$$

c) k= -1 $\to A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & -3 \end{bmatrix} f_3 = f_1 \to$ ran (A) = 2; $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \to$

ran (A´) = 3, Sistema Incompatible (no tiene solución).

2) Existe A^{-1} si y sólo si $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & m \\ m & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8-m^2-6m; -m^2-6m-8=0 \to m=-2 \text{ ó } m=-4$$

Por lo tanto, existe la inversa de A si y sólo si $m \neq -2$ y $m \neq -4$

Si m=2, $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}[\mathrm{Adj}(A)]^t=\dfrac{1}{-24}\begin{bmatrix}8 & 4 & -4\\ 4 & -10 & -2\\ -8 & 2 & -2\end{bmatrix}^t=\dfrac{1}{-12}\begin{bmatrix}4 & 2 & -4\\ 2 & -5 & 1\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$

3)

$$\begin{vmatrix}x & x & x & x\\ x & y & y & y\\ x & y & z & z\\ x & y & z & t\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x & y & y & y\\ x & y & z & z\\ x & y & z & t\end{vmatrix}\begin{matrix}c_2-c_1\\ = \\ c_3-c_1\\ c_4-c_1\end{matrix}\; x\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ x & y-x & y-x & y-x\\ x & y-x & z-x & z-x\\ x & y-x & z-x & t-x\end{vmatrix}= c_3-c_2$$

$$=x\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}y-x & y-x & y-x\\ y-x & z-x & z-x\\ y-x & z-x & t-x\end{vmatrix}=x\cdot(y-x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ y-x & z-x & z-x\\ y-x & z-x & t-x\end{vmatrix}\begin{matrix}= c_2-c_1\\ c_3-c_1\end{matrix}\; x\cdot(y-x)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ y & z-y & z-y\\ y & z-y & t-y\end{vmatrix}=$$

$$=x\cdot(y-x)\cdot 1\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}z-y & z-y\\ z-y & t-y\end{vmatrix}=x(y-x)(z-y)\begin{vmatrix}1 & 1\\ z-y & t-y\end{vmatrix}=$$

$$\underset{c_2-c_1}{=}\; x(y-x)(z-y)\begin{vmatrix}1 & 0\\ z-y & t-z\end{vmatrix}=x(y-x)(z-y)\cdot 1\cdot(-1)^2\,(t-z)=x(y-x)(z-y)(t-z)$$

4) x = Precio del vino; y = Precio de los refrescos; z= Precio de las cervezas

$$\begin{cases}x+y+z=500\\ x=y+z-60\\ x+\dfrac{30}{100}x+y+\dfrac{6}{100}y+z+\dfrac{12}{100}z=592´4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y+z=500\\ x-y-z=-60\\ 1´3x+1´06y+1´12z=592´4\end{cases}\rightarrow f_1+f_2\begin{cases}x=220\\ y+z=280\\ 1´06y+1´12z=306´4\end{cases}$$

$\rightarrow$ x = 220, y = 120, z = 160.(Resuelvendo por reducción las dos últimas ecuaciones)

5) $\begin{cases}(2+a)x-y=a\\ -3ax+(2-a)y=-a\end{cases}\rightarrow A´=\begin{bmatrix}2+a & -1 & a\\ -3a & 2-a & -a\end{bmatrix};\quad\begin{vmatrix}2+a & -1\\ -3a & 2-a\end{vmatrix}=-a^2-3a+4;$

$-a^2-3a+4=0\rightarrow a=1$ ó $a=-4$.

5.1) Si a = 1 $A´=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}\; f_2=-f_1$ → ran (A) = ran (A´) = 1 < nº incógnitas = 2 S.C.I.

5.2) Si a = - 4 $A´=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -4\\ 12 & 6 & 4\end{bmatrix};\quad\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 12 & 4\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow$ ran (A) = 1 < ran (A´) = 2 S.I.

5.3) Si $a\neq 1$ y $a\neq -4\rightarrow$ ran (A) = ran (A´) = 2 = nº incógnitas S.C.D.

a) a = - 4 ; b) a = 1 ; c) $a\neq 1$ y $a\neq -4$

d) Si x = -1, $\begin{cases}-(2+a)-y=a\\ 3a+(2-a)y=-a\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=-2-2a\\ 3a+(2-a)(-2-2a)=-a\rightarrow 2a^2+2a-4=0\rightarrow a=1 \text{ ó } a=-2\end{cases}$